PART3 方べきの定理

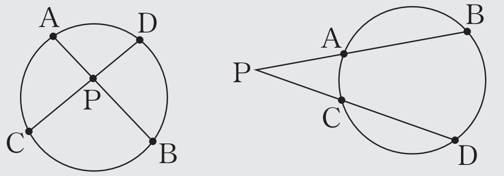
要点① 相似な三角形と方べきの定理

円と2直線について，次の定理が成り立つ。

方べきの定理(1)

点Pを通る2直線が，円とそれぞれ2点A，Bと2点C，Dで交わるとき

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

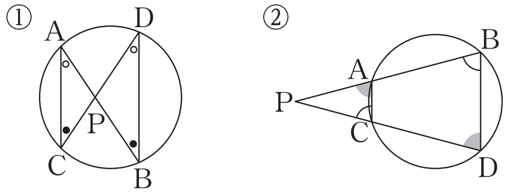


（証明）

右図①，②において △PAC∽△PDB より

$$PA : PD = PC : PB$$

よって $PA \cdot PB = PC \cdot PD$



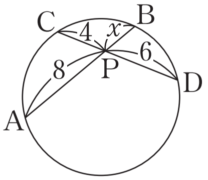
$PA \cdot PB$ および $PC \cdot PD$ は，点Pから直線と円の2つの交点までの長さの積(これを「方べき」という)であり，ある円に関して方べきの値は直線の引き方によらず一定である。

例 右の図において，方べきの定理より

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

$$\cdot = \cdot$$

$$x = 3$$

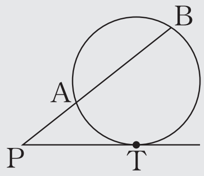


また，次の定理も成り立つ。

方べきの定理(2)

点Pを通る2直線のうち，一方が円Oと2点A，Bで交わり，もう一方が円Oと点Tで接するとき

$$PA \cdot PB = PT^2$$

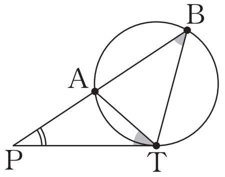


（証明）

右図において $\triangle PTA \backsim \triangle PBT$ より

$$PA : PT = PT : PB$$

よって $PA \cdot PB = PT^2$



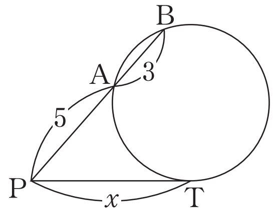
例　右の図において，方べきの定理より

$$PA \cdot PB = PT^2$$

$$\quad \cdot \qquad = $$

$$x^2 = 40$$

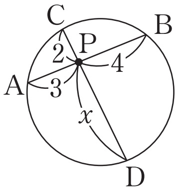
$x > 0$ より $x = 2\sqrt{10}$



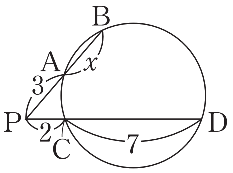
※方べきの定理(1)の逆，および方べきの定理(2)の逆についても成り立つことが知られている。

3 次の図において，x を求めよ。ただし，点 T は接点とする。

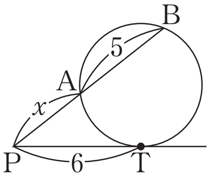
(1)



(2)



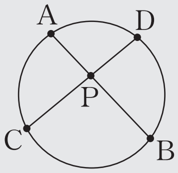
(3)

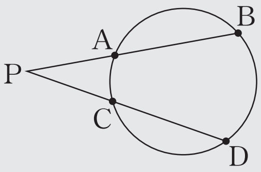


Point Pickup

方べきの定理

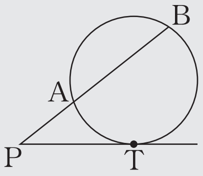
円と 2 点で交わる 2 直線





$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

円の接線および円と 2 点で交わる直線

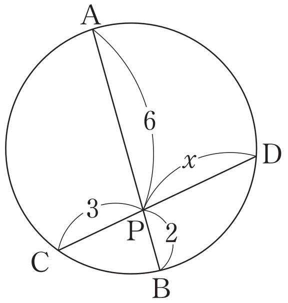


$$PA \cdot PB = PT^2$$

第 8 講　PART3 確認問題

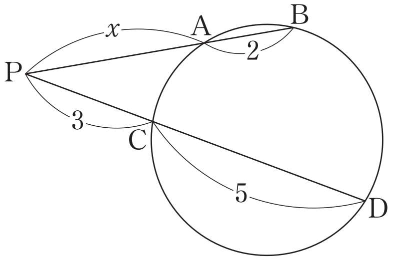
次の図で，x の値を求めよ。

1



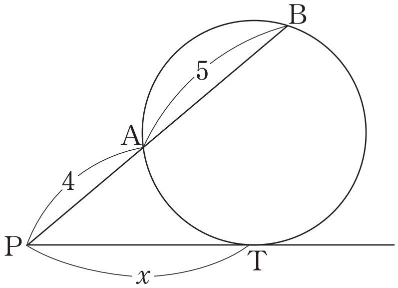
$x=$ ア

2



$x=$ イ

3



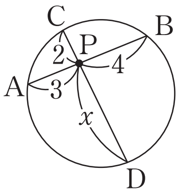
点 T は接点

$x=$ ウ

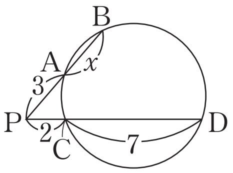
PART3 方べきの定理

3 次の図において，x を求めよ。ただし，点 T は接点とする。

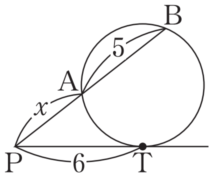
(1)



(2)



(3)



[解答]

(1) $2 \cdot x = 3 \cdot 4$　　$x = 6$

(2) $3(3+x) = 2 \cdot (2+7)$　　$3+x = 6$　　$x = 3$

(3) $x(x+5) = 6^2$　　$x^2+5x-36=0$　　$(x+9)(x-4)=0$　　$x>0$ より $x=4$

第 8 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：4

[解説]

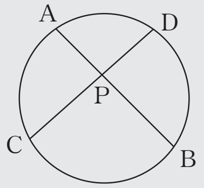
方べきの定理より，[A]

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

$$6 \cdot 2 = 3 \cdot x$$

$$x = 4$$

[A]　方べきの定理



$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

2

[正解] イ：4

[解説]

方べきの定理より，[B]

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

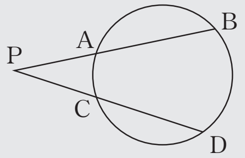
$$x(x+2) = 3 \cdot (3+5)$$

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$(x-4)(x+6) = 0$$

$x > 0$ より，$x = 4$

[B]　方べきの定理



$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

3

[正解] ウ：6

[解説]

方べきの定理より，[C]

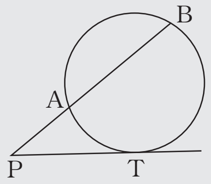
$$PA \cdot PB = PT^2$$

$$4 \cdot (4+5) = x^2$$

$$x^2 = 36$$

$x > 0$ より，$x = 6$

[C]　方べきの定理



$PA \cdot PB = PT^2$